# 4 paskaita. Naudingumas

4.1 Kardinalusis naudingumas

4.2 Naudingumo funkcijos sudarymas

4.3 Keletas naudingumo funkcijų pavyzdžių

- 4.3.1 Tobulieji pakaitalai
- 4.3.2 Tobulieji papildiniai
- 4.3.3 Kvazitiesinės pirmenybės
- 4.3.4 Cobb'o - Douglas'o pirmenybės

4.4 Ribinis naudingumas

4.5 Ribinis naudingumas ir MRS

4.6 Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas

# Įvadas

- **XIX amžiuje** laikais filosofai ir ekonomistai apie „naudingumą" kalbėjo kaip apie žmogaus visapusiškos gerovės rodiklį. **Naudingumas buvo laikomas skaičiais išreikštos asmeninės laimės matu**. Tada visiškai paprasta įsivaizduoti, kad vartotojai renkasi, ką daryti, lyg siektų maksimizuoti savo naudingumą.
- Bėda ta, jog **ekonomistai klasikai niekad neapibūdino, kaip naudingumą išmatuoti**. Kaip skaičiais turėtume išreikšti naudingumo „kiekį", susijusį su skirtingais pasirinkimais? Ar vieno asmens naudingumas yra toks pat kaip ir kito? Ar naudingumo sąvoka turi kokią nors kitokią savarankišką reikšmę, nesusijusią su tuo, ką žmonės maksimizuoja?

# Įvadas (2)

- Dėl šių supratimo sunkumų **ekonomistai atsisakė senamadiško požiūrio į naudingumą** kaip į laimės matą. **Vartotojo elgsenos teorija buvo visiškai naujai suformuluota pagal vartotojo pirmenybes**, o naudingumas suprantamas tik kaip pirmenybių vaizdavimo būdas.
- Ekonomistai palaipsniui pripažino, kad viskas, ką reiškė naudingumas, kiek tai susiję su pasirinkimo elgsena, buvo tai, **ar vienas rinkinys turėjo didesnį naudingumą nei kitas, o kiek didesnį, iš tikrųjų neturėjo reikšmės**. Iš pradžių pirmenybės buvo apibrėžtos turint galvoje naudingumą: sakyti, kad $(x_1,x_2)$ rinkiniui teikiama pirmenybė $(y_1,y_2)$ rinkinio atžvilgiu, reiškė, jog $X$ rinkinys teikė didesnį naudingumą nei $Y$ rinkinys.

# Įvadas (3)

- Bet dabar ekonomistai linkę manyti atvirkščiai: **vartotojo pirmenybės yra pagrindinis metodas pasirinkimui nagrinėti, o naudingumas yra tik paprastas pirmenybių išraiškos būdas.**
- **Naudingumo funkcija** yra toks skaičiaus priskyrimo kiekvienam galimam vartojimo rinkiniui būdas, kai mėgstamesniems rinkiniams priskiriami didesni skaičiai nei mažiau mėgstamiems. Tai yra $(x_1,x_2)$ rinkiniui teikiama pirmenybė $(y_1,y_2)$ rinkinio atžvilgiu tada ir tik tada, jei $(x_1,x_2)$ naudingumas didesnis už $(y_1,y_2)$ naudingumą. Užrašant simboliais: $(x_1,x_2) \succ (y_1,y_2)$ tada ir tik tada, jei $u(x_1,x_2) > u(y_1,y_2)$.

# Įvadas (4)

- **Vienintelė svarbi naudingumo priskyrimo savybė yra ta, kaip jis išrikiuoja prekių rinkinius**. Naudingumo funkcijos dydis yra svarbus tik skirtingų vartojimo rinkinių išrikiavimui; kiek skiriasi bet kokių dviejų vartojimo rinkinių naudingumas, nesvarbu. Toks **naudingumas** vadinamas **ordinaliuoju** - norint pabrėžti prekių rinkinių išrikiavimą (žr. pavyzdį 4.1 lent.).
- Šiame pavyzdyje A rinkinį vartotojas mėgsta labiau už B, o B - už C. **Visi nurodyti būdai yra pagrįstos naudingumo funkcijos, apibūdinančios tas pačias pirmenybes**, nes pagal juos visus A priskiriamas didesnis skaičius nei B, kuriam savo ruožtu priskiriamas didesnis skaičius nei C.

## 4.1 lentelė. Naudingumų priskyrimo būdai.

| **Rinkinys** | $\mathbf{U_1}$ | $\mathbf{U_2}$ | $\mathbf{U_3}$ |
|---|---|---|---|
| **A** | 3 | 17 | -1 |
| **B** | 2 | 10 | -2 |
| **C** | 1 | 0.002 | -3 |

# Įvadas (5)

- **Kadangi svarbu tik rinkinių išrikiavimas, tai priskirti jiems naudingumus negali būti vienintelio būdo**. Jeigu galima surasti vieną būdą priskirti naudingumo skaičius prekių rinkiniams, tai galime surasti ir neribotą skaičių būdų, kaip tai padaryti. Jeigu $u(x_1,x_2)$ yra naudingumo skaičių priskyrimo būdas rinkiniams $(x_1,x_2)$, tai $u(x_1,x_2)$ daugyba iš 2 (arba bet kokio kito teigiamo skaičiaus) yra lygiai tiek pat geras būdas priskirti naudingumus.
- Daugyba iš 2 yra **monotoninės transformacijos** pavyzdys. **Monotoninė transformacija yra būdas transformuoti vieną skaičių aibę į kitą skaičių aibę išsaugant skaičių tvarką**.

# Įvadas (6)

- Monotoninę transformaciją paprastai užrašome funkcija $f(u)$, kuri kiekvieną $u$ skaičių transformuoja į kokį nors kitą skaičių $f(u)$ - ji išsaugo skaičių tvarką taip, kad jei $u_1 > u_2$, tai $f(u_1) > f(u_2)$. **Monotoninė transformacija ir monotoninė funkcija iš esmės yra tie patys dalykai**.
- Monotoninės transformacijos pavyzdžiai yra daugyba iš teigiamo skaičiaus (pvz., $f(u) = 3u$), bet kokio skaičiaus pridėjimas (pvz., $f(u) = u + 17$), $u$ pakėlimas nelyginiu laipsniu (pvz., $f(u) = u^3$) ir taip toliau.

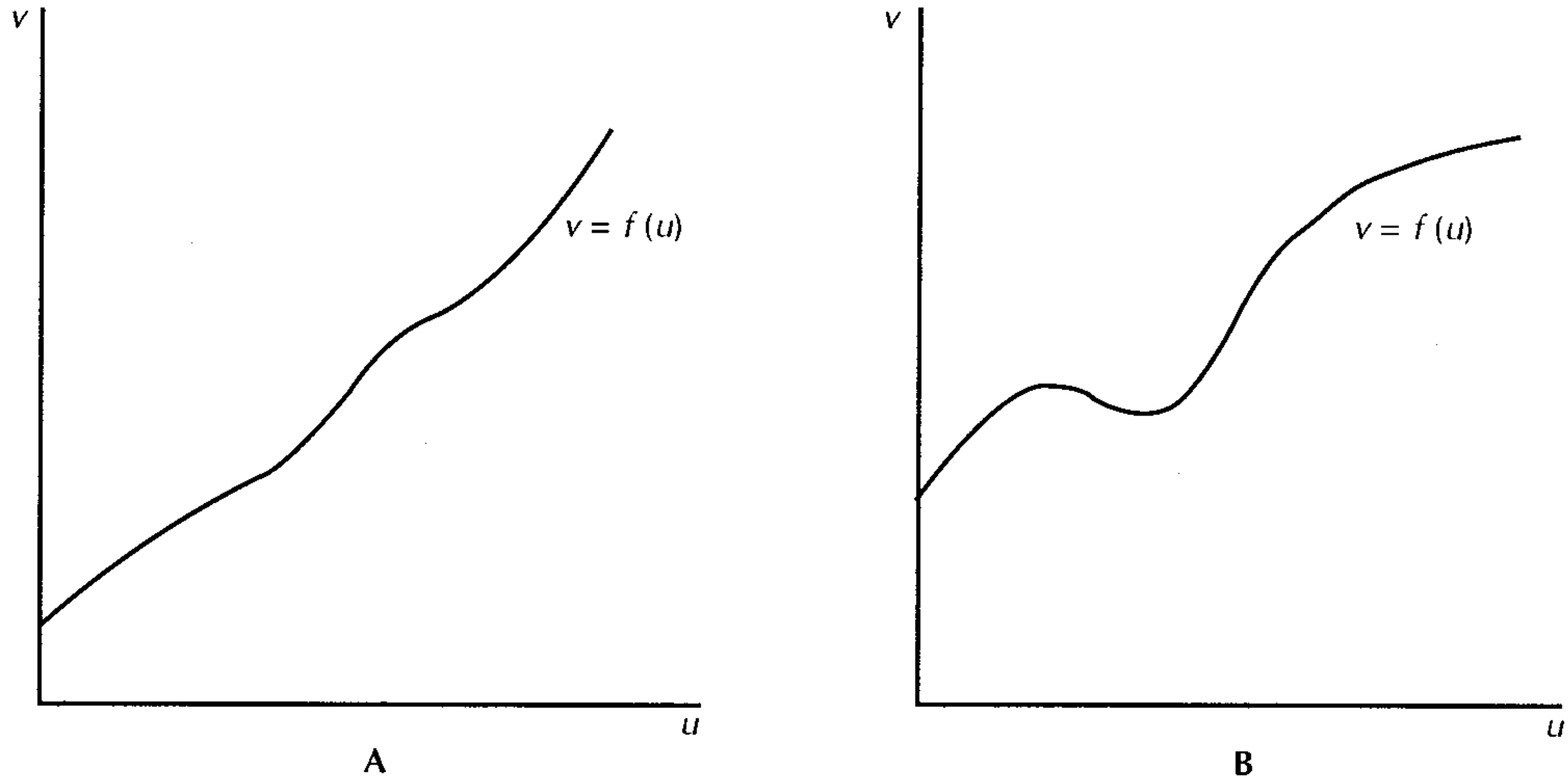
# Įvadas (7)

- Galime apskaičiuoti **funkcijos *f*(*u*) kitimo greitį, kintant *u***, surasdami $f$ pokytį esant dviem $u$ reikšmėms ir jį padalydami iš $u$ pokyčio:

$$\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

- Esant monotoninei transformacijai, $f(u_2) - f(u_1)$ visada yra to paties ženklo kaip ir $u_2 - u_1$. Taigi **monotoninė funkcija visada turi teigiamą pokyčių santykį**. Tai reiškia, kad **monotoninės funkcijos grafikas visada turės teigiamą nuolydį**, kaip pavaizduota 4.1A paveiksle.

**4.1 pav. Teigiama monotoninė transformacija.** A brėžinys vaizduoja monotoninę funkciją, kuri visada didėja. B brėžinys vaizduoja funkciją, kuri ne monotoninė todėl, kad ji kartais didėja, kartais mažėja.



# Įvadas (8)

- Jei $f(u)$ yra bet kokia naudingumo funkcijos, kuri vaizduoja kokias nors pirmenybes, monotoninė transformacija, tai tada $f(u(x_1,x_2))$ taip pat yra naudingumo funkcija, kuri vaizduoja tas pačias pirmenybes.
- Tai įrodysime **trimis** žemiau pateiktais teiginiais:

1. Tvirtinti, kad $u(x_1,x_2)$ vaizduoja kokias nors pirmenybes, reiškia, jog $u(x_1,x_2) > u(y_1,y_2)$ tada ir tik tada, jei $(x_1,x_2)(y_1,y_2)$.
2. Tačiau jei $f(u)$ yra monotoninė transformacija, tai $u(x_1,x_2) > u(y_1,y_2)$ tada ir tik tada, jei $f(u(x_1,x_2)) > f(u(y_1,y_2))$.
3. Todėl $f(u(x_1,x_2)) > f(u(y_1,y_2))$ tada ir tik tada, jei $(x_1,x_2)(y_1,y_2)$, taigi funkcija $f(u)$ vaizduoja pirmenybes tokiu pat būdu, kaip pradinė naudingumo funkcija $u(x_1,x_2)$.

# Įvadas (9)

- **Geometriškai, naudingumo funkcija yra būdas paženklinti abejingumo kreives**. Kadangi kiekvienas rinkinys, esantis ant abejingumo kreivės, turi turėti tokį pat naudingumą, tai **naudingumo funkcija - toks skaičių priskyrimo skirtingoms abejingumo kreivėms būdas, kai aukštesnėms abejingumo kreivėms priskiriami didesni skaičiai**.
- Šiuo požiūriu **monotoninė transformacija yra tik naujas abejingumo kreivių paženklinimas**. Jei abejingumo kreivės, kuriose yra mėgstamesni rinkiniai, turi aukštesnį ženklą negu abejingumo kreivės, kuriose yra mažiau mėgstami rinkiniai, tai paženklinimas vaizduos tas pačias pirmenybes.

# Kardinalusis naudingumas

- Yra naudingumo teorijų, kuriose naudingumo dydis laikomas svarbiu dydžiu. Jos žinomos kaip **kardinaliojo naudingumo** teorijos. Jos teigia, kad dviejų prekių rinkinių naudingumų skirtumo dydis turi tam tikrą svarbą.
- Žinome, kaip pasakyti, kai konkretus žmogus teikia pirmenybę vienam ar kitam prekių rinkiniui: tiesiog siūlome rinktis iš dviejų rinkinių ir matome, kuris iš jų pasirenkamas.
- Taigi žinome, kaip ordinalųjį naudingumą priskirti dviem prekių rinkiniams: didesnį naudingumą tiesiog priskiriame išsirinktam rinkiniui, o ne atsisakytam. Bet kuris toks priskyrimas ir bus naudingumo funkcija. Taigi turime **stebėjimu paremtą kriterijų**, kuris leidžia nustatyti, ar kokiam nors asmeniui vienas rinkinys naudingesnis nei kitas.

# Kardinalusis naudingumas (2)

- Bet **kaip pasakysime, kad žmogus dvigubai labiau mėgsta vieną rinkinį už kitą?** Kaip dar galėtume pasakyti, jog vieną rinkinį jūs mėgstate dvigubai labiau nei kitą?
- Tokios rūšies užduočiai galima pasiūlyti įvairių apibrėžimų: aš **mėgstu vieną rinkinį dvigubai labiau nei kitą, jei noriu už jį mokėti dvigubai daugiau**. Arba - mėgstu vieną rinkinį dvigubai labiau nei kitą, jei noriu dvigubai toliau bėgti, kad gaučiau jį, arba **laukti dvigubai ilgiau**, arba **lošti esant perpus mažiau galimybių laimėti**.
- Kiekvienas iš šių apibrėžimų leistų surasti būdą, kaip priskirti naudingumo lygius, kurių dydis turi kokią nors taikomąją svarbą. Tačiau **jie nelabai prasmingi**.

# Kardinalusis naudingumas (3)

- Net jei kiekvienas jų gali paaiškinti, ką reiškia norėti vieno daikto dvigubai labiau nei kito, **nei vienas iš jų neatrodo esąs įtikinamiausias**. Net jeigu ir rastume ypač įtikinantį būdą naudingumo dydžiams priskirti, kuo jis mums praverstų apibūdinant pasirinkimo elgseną? Kad pasakytume, vienas ar kitas rinkinys bus pasirinktas, užtenka žinoti, kuris yra mėgstamesnis - kuris turi didesnį naudingumą. Jei ir žinosime, kiek naudingumas didesnis, tai vis tiek nieko nepridėsime prie mūsų pasirinkimo apibūdinimo.
- Kadangi kardinalusis naudingumas pasirinkimo elgsenai apibūdinti nereikalingas ir vis tiek nėra įtikinančio būdo priskirti kardinaliuosius naudingumus, **apsiribosime tik grynai ordinaliuoju**.

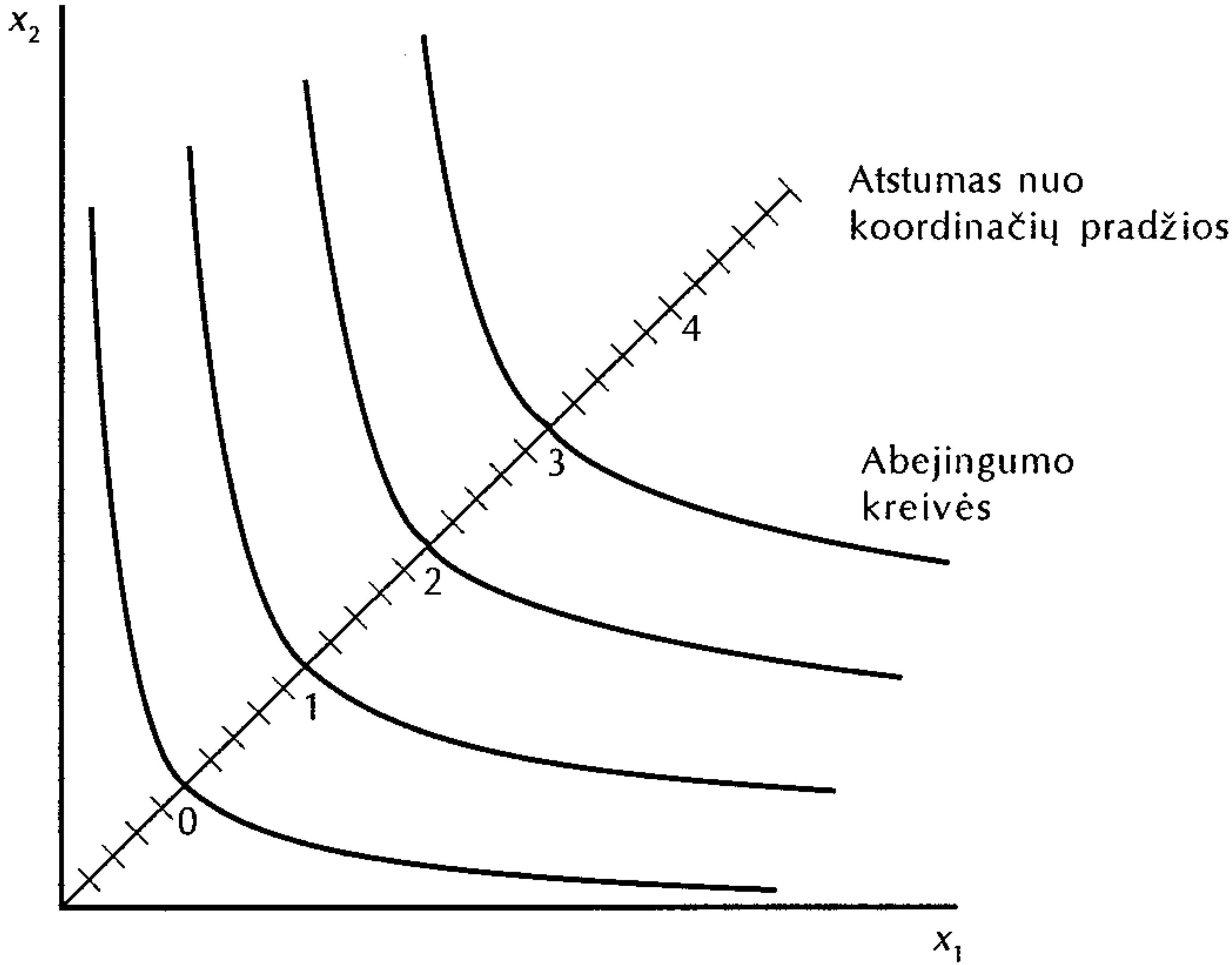
# Naudingumo funkcijos sudarymas

- Tačiau ar galime būti įsitikinę, kad iš viso yra koks nors būdas priskirti ordinaliuosius naudingumus? Ar, žinodami pirmenybės išrikiavimą, visada galime rasti naudingumo funkciją, kuri išrikiuos prekių rinkinius tokiu pat būdu kaip ir šios pirmenybės? Ar yra naudingumo funkcija, kuri apibūdintų bet kokį priimtiną pirmenybių išdėstymą?
- **Ne visos pirmenybių rūšys gali būti pavaizduotos naudingumo funkcija**. Pavyzdžiui, įsivaizduokite, kažkas turi tokias netranzityvias pirmenybes, kad $A \succ B \succ C \succ A$. Tada naudingumo funkcija šioms pirmenybėms susidarys iš tokių skaičių $u(A)$, $u(B)$ ir $u(C)$, kad $u(A) > u(B) > u(C) > u(A)$. Bet tai neįmanoma.

# Naudingumo funkcijos sudarymas (2)

- Tačiau atmetus ydingus, tokius, kaip netranzityvių pirmenybių, atvejus, paaiškėja, kad **naudingumo funkciją, kuri vaizduotų pirmenybes, galima rasti paprastai**.
- Įsivaizduokime, kad duotas toks abejingumo kreivių brėžinys kaip 4.2 paveiksle. Žinome, kad naudingumo funkcija yra būdas paženklinti abejingumo kreives taip, kad aukštesnėms abejingumo kreivėms būtų priskiriami didesni skaičiai. Kaip tai galėtume padaryti?
- Vienas lengvas būdas: **nubrėžti įstrižainę ir paženklinti kiekvieną abejingumo kreivę atstumu, matuojamu išilgai tos tiesės nuo koordinačių pradžios**.

**4.2 pav. Naudingumo funkcijos išvedimas iš abejingumo kreivių.** Nubrėžkite įstrižainę ir paženklinkite kiekvieną abejingumo kreivę atstumu, atidėtu tiesėje nuo koordinačių pradžios.



# Naudingumo funkcijos sudarymas (3)

- Kaip žinome, kad tai naudingumo funkcija? Nesunku pastebėti, kad **jei pirmenybės monotoninės, tada tiesė, einanti per koordinačių pradžios tašką, kiekvieną abejingumo kreivę privalo kirsti tik vieną kartą**. Taip kiekvienas rinkinys paženklinamas, o rinkiniai ant aukštesnių abejingumo kreivių gauna didesnes žymes - to ir pakanka naudingumo funkcijai.
- Tai mums parodo vieną būdą, kaip surasti abejingumo kreivių paženklinimą bent tol, kol pirmenybės yra monotoninės. Tai ne visada bus pats lengviausias būdas bet kokiu atveju, tačiau jis parodo, kad ordinaliojo naudingumo funkcijos sąvoka labai bendra: beveik bet kokia „priimtinų” pirmenybių rūšis gali būti išreikšta pasinaudojant naudingumo funkcija.

# Naudingumo funkcijų pavyzdžiai

- **3 paskaitoje apibūdinome keletą pirmenybių ir jas išreiškiančių abejingumo kreivių pavyzdžių**.
- Šias pirmenybes galima išreikšti ir naudingumo funkcijomis. Jei duota funkcija $u(x_1,x_2)$, tai nubrėžti abejingumo kreives gana lengva: **atidėkite visus taškus $u(x_1,x_2)$ taip, kad $u(x_1,x_2)$ reikšmė būtų pastovi**.
- Matematikoje aibė visų $u(x_1,x_2)$, tokių, kad $u(x_1,x_2)$ reikšmė lygi konstantai, vadinama **lygio aibe** (level set). **Kiekvienai skirtingai konstantos reikšmei gausite skirtingą abejingumo kreivę**.

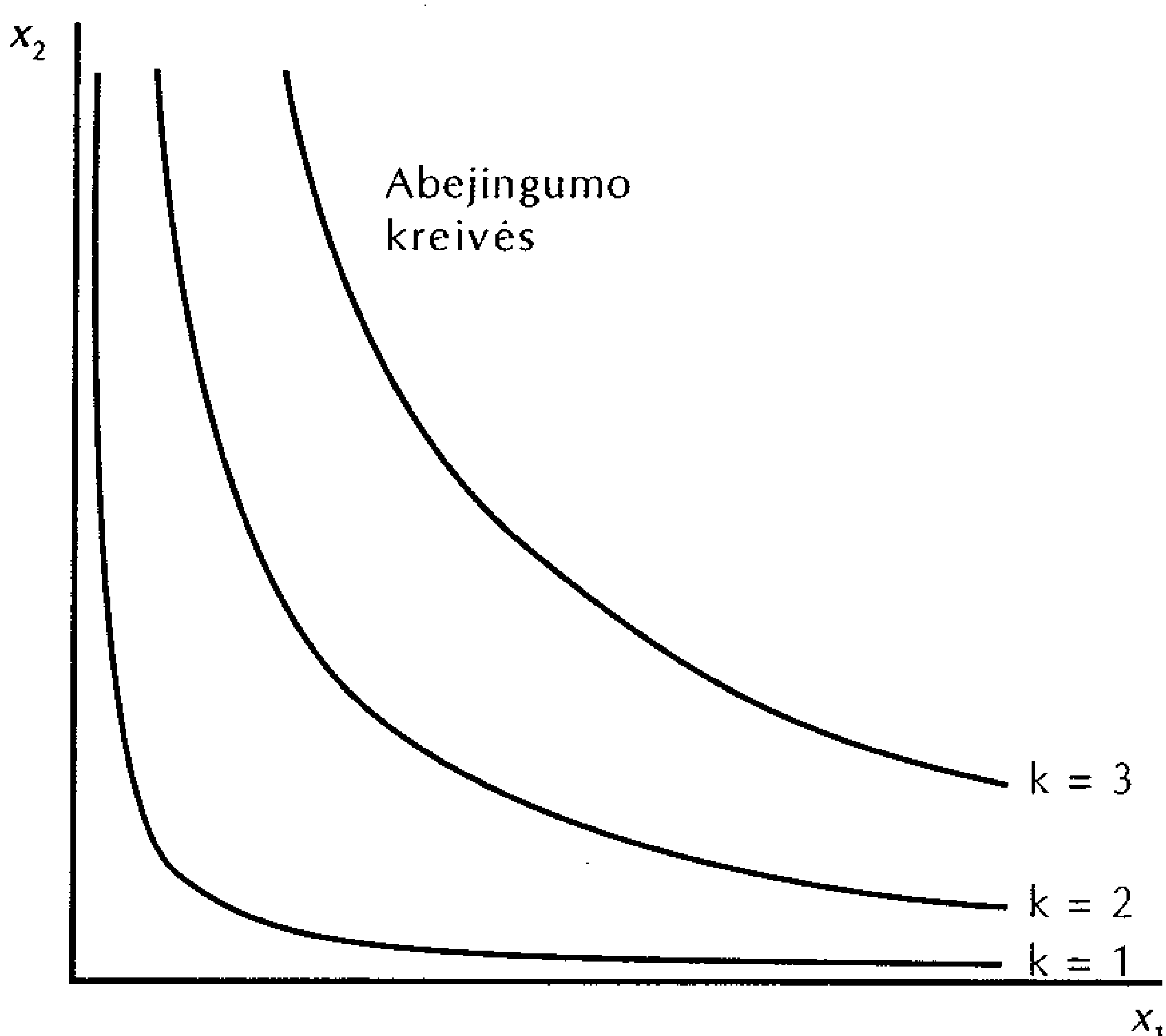
# Pavyzdys: abejingumo kreivių išvedimas iš naudingumo

- Tarkime, kad naudingumo funkcija tokia: $u(x_1,x_2) = x_1x_2$. Kaip atrodys abejingumo kreivės? Žinome, kad tipiška abejingumo kreivė yra aibė visų $x_1$, ir $x_2$, kad $k = x_1x_2$, kur $k$ - kokia nors konstanta. $x_2$ išreikšdami kaip $x_1$ funkciją, matome, kad tipiška abejingumo kreivė užrašoma formule:

$$x_2 = \frac{k}{x_1}$$

- Ši kreivė pavaizduota 4.3 paveiksle, kai k = 1,2,3...

**4.3 pav. Abejingumo kreivės.** Abejingumo kreivės $k = x_1 x_2$, esant skirtingoms $k$ reikšmėms.



# Pavyzdys: abejingumo kreivių išvedimas iš naudingumo (2)

- Aptarkime kitą pavyzdį. Įsivaizduokime, kad duota **naudingumo funkcija** $\boldsymbol{v(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2}$. Kaip atrodys jos abejingumo kreivės? Iš algebros taisyklių žinome, kad:

$v(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2 = u(x_1,x_2)^2$.

- Todėl naudingumo funkcija $v(x_1,x_2)$ yra tik naudingumo funkcija $u(x_1,x_2)$, pakelta kvadratu. Kadangi $u(x_1,x_2)$ negali būti neigiamas, iš to išeina, kad $v(x_1,x_2)$ yra pirmesnės naudingumo funkcijos $u(x_1,x_2)$ monotoninė transformacija.
- Tai reiškia, jog naudingumo funkcijos $v(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$ abejingumo kreivės turi atrodyti lygiai taip, kaip parodyta 4.3 paveiksle. Dabar ženklinimas bus kitas - abejingumo kreivių žymės, kurios buvo 1,2,3..., bus 1,4,9.

# Pavyzdys: abejingumo kreivių išvedimas iš naudingumo (3)

- Bet rinkinių, kur $v(x_1,x_2) = 9$, aibė bus lygiai tokia pat kaip ir rinkinių aibė, kurios naudingumo funkcija $u(x_1,x_2) = 3$.Taigi $v(x_1,x_2)$ vaizduoja lygiai tokias pat pirmenybes kaip $u(x_1,x_2)$, kadangi išrikiuoja visus rinkinius tokia pat tvarka.
- **Rasti naudingumo funkciją vaizduojančias kažkokias abejingumo kreives yra du būdai**.
- Pirmasis - matematinis. **Jei duotos abejingumo kreivės, tai siekiame rasti funkciją, kuri išlaiko pastovią reikšmę išilgai kiekvienos abejingumo kreivės ir priskiria didesnes reikšmes aukštesnėms abejingumo kreivėms**.

# Pavyzdys: abejingumo kreivių išvedimas iš naudingumo (4)

- **Antrasis būdas paremtas intuicija**. Žinodami pirmenybių apibūdinimą **bandome sugalvoti, ką vartotojas stengiasi maksimizuoti**, - koks prekių derinys apibūdina vartotojo pasirinkimo elgseną. Aptarsime keletą pavyzdžių.

# Pavyzdys: tobulieji pakaitalai

- **Raudonų ir mėlynų pieštukų pavyzdyje vartotojui rūpėjo tik bendras pieštukų skaičius**.
- Todėl **naudingumą būtų paprasta matuoti bendru pieštukų skaičiumi**. Iš pradžių parenkame naudingumo funkciją $u(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.
- Ar tai teisinga? Svarbūs du dalykai: **ar ši naudingumo funkcija išlaiko pastovią reikšmę išilgai abejingumo kreivių? Ar paženklina didesne žyme mėgstamesnius rinkinius?**
- **Į abu klausimus galime atsakyti taip**, todėl ir turime naudingumo funkciją.

# Pavyzdys: tobulieji pakaitalai (2)

- Tai ne vienintelė naudingumo funkcija, kurią galėtume taikyti. Galime naudoti pieštukų skaičiaus kvadratą.
- Todėl naudingumo funkcija $v(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2=x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2$ tobuluosius pakaitalus taip pat išreikš, kaip ir bet kuri kita $u(x_1,x_2)$ monotoninė transformacija.
- **Kas, jei vartotojas pasirengęs keisti pirmą prekę į antrą santykiu, kitokiu nei vienas su vienu?** Pavyzdžiui, jei vartotojas pareikalautų dviejų vienetų antros prekės dėl to, kad galėtų kompensuoti pirmos prekės 1 vieneto atsisakymą.
- Tai reiškia, kad pirma prekė vartotojui yra dvigubai vertingesnė nei antra prekė. Todėl naudingumo funkcija įgyja formą $u(x_1,x_2)=2x_1+x_2$.

# Pavyzdys: tobulieji pakaitalai (3)

- Apskritai **tobulųjų pakaitalų pirmenybės gali būti užrašomos tokiu naudingumo funkcijos pavidalu**:

  $u(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$

- Čia *a* ir *b* yra teigiami skaičiai, kurie matuoja pirmos ir antros prekių „vertingumą" vartotojui. Atkreipkite dėmesį, kad tipiškos abejingumo kreivės nuolydis paprastai yra -*a*/*b*.

# Pavyzdys: tobulieji papildiniai

- Tai **kairiojo ir dešiniojo batų atvejis**. Esant šioms pirmenybėms, vartotojui rūpi tik turimų batų porų skaičius, todėl paprasta batų porų skaičių pasirinkti kaip naudingumo funkciją. Turimų pilnų batų porų skaičius yra dešiniųjų batų skaičiaus $x_1$ ir kairiųjų batų skaičiaus $x_2$ minimumas. Todėl **naudingumo funkcija tobuliesiems papildiniams turi pavidalą $u(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}$**.
- Kad įsitikintume, jog tokia naudingumo funkcija visiškai pagrįsta, pasirinkime prekių rinkinį (10,10). Jei pridėsime vieną vienetą pirmos prekės, tai turėsime rinkinį (11,10), kuris išliks ant tos pačios abejingumo kreivės. Ar tikrai taip bus? Taip, nes $\min\{10,10\} = \min\{11,10\} = 10$.

# Pavyzdys: tobulieji papildiniai (2)

- Pavyzdžiui, kaip bus su vartotoju, kuris visada deda 2 šaukštelius cukraus į kiekvieną puodelį arbatos? Jei $x_1$ yra arbatos puodelių skaičius, o $x_2$ - cukraus šaukštelių skaičius, tada tinkamai pasaldintų arbatos puodelių skaičius yra $\min\{x_1, 1/2x_2\}$.
- Apskritai **naudingumo funkcija, kuri apibūdina tobulųjų papildinių pirmenybes, užrašoma taip**:

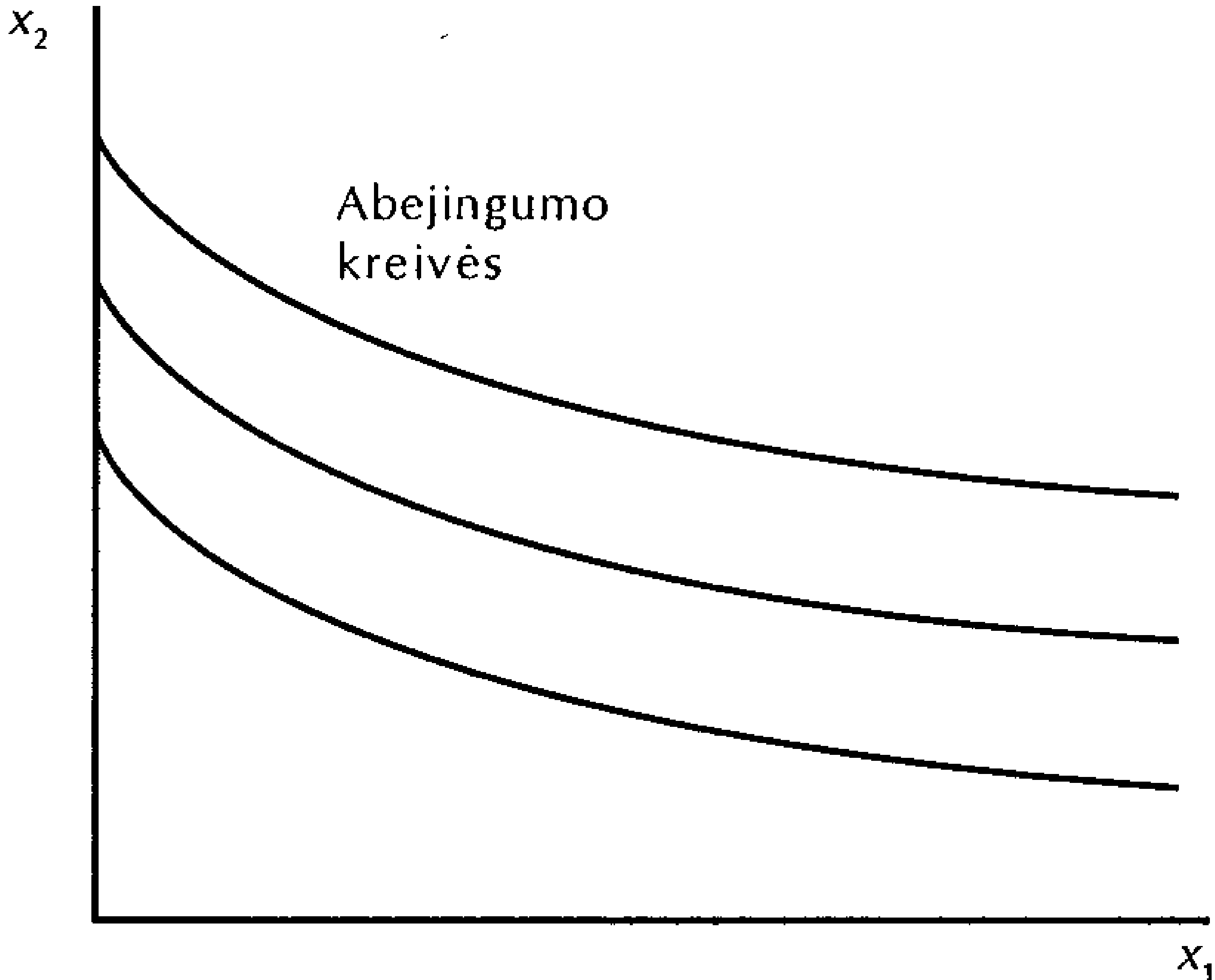
$$u(x_1,x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

čia $a$ ir $b$ yra teigiami skaičiai, rodantys prekių vartojimo santykį.

# Pavyzdys: kvazitiesinės pirmenybės

- Su tokiu abejingumo kreivių pavidalu dar nebuvome susipažinę. **Tarkime, vartotojo abejingumo kreivės yra viena kitos vertikalus postūmis**, kaip 4.4 paveiksle.
- Tai reiškia, kad visos abejingumo kreivės gaunamos vertikaliai pastumiant vieną iš abejingumo kreivių, vadinasi, **abejingumo kreivės lygtis turi pavidalą $x_2 = k - v(x_1)$**, kur $k$ yra skirtinga konstanta kiekvienai abejingumo kreivei.
- Ši lygybė rodo, kad kiekvienos abejingumo kreivės aukštis yra kažkokios $x_1$ funkcijos $-v(x_1)$ ir konstantos $k$ suma. Kuo didesnė $k$ reikšmė, tuo aukštesnė abejingumo kreivė. Minuso ženklas yra tik susitarimas, vėliau pamatysime, kodėl jis patogus.

**4.4 pav. Kvazitiesinės pirmenybės.** Kiekviena abejingumo kreivė gaunama vertikaliai pastumiant kitą abejingumo kreivę.



# Pavyzdys: kvazitiesinės pirmenybės (2)

- **Natūralu paženklinti abejingumo kreives panaudojant *k***, kitaip sakant, abejingumo kreivės aukščiu išilgai vertikaliosios ašies. Išreiškę $k$ ir prilyginę jį naudingumui, gauname:

  $u(x_1,x_2) = k = v(x_1) + x_2$

- Šiuo atveju **naudingumo funkcija yra tiesinė antros prekės atžvilgiu, bet (galimas daiktas) netiesinė pirmosios atžvilgiu**, iš čia ir kilęs kvazitiesinio naudingumo pavadinimas, reiškiantis „iš dalies tiesinį" naudingumą.
- Būdingi kvazitiesinio naudingumo pavyzdžiai būtų arba $u(x_1,x_2) = ln\ x_1 + x_2$.

# Pavyzdys: Cobb'o - Douglas'o pirmenybės

- Kita dažnai taikoma naudingumo funkcija yra **Cobb'o-Douglas'o naudingumo funkcija**:

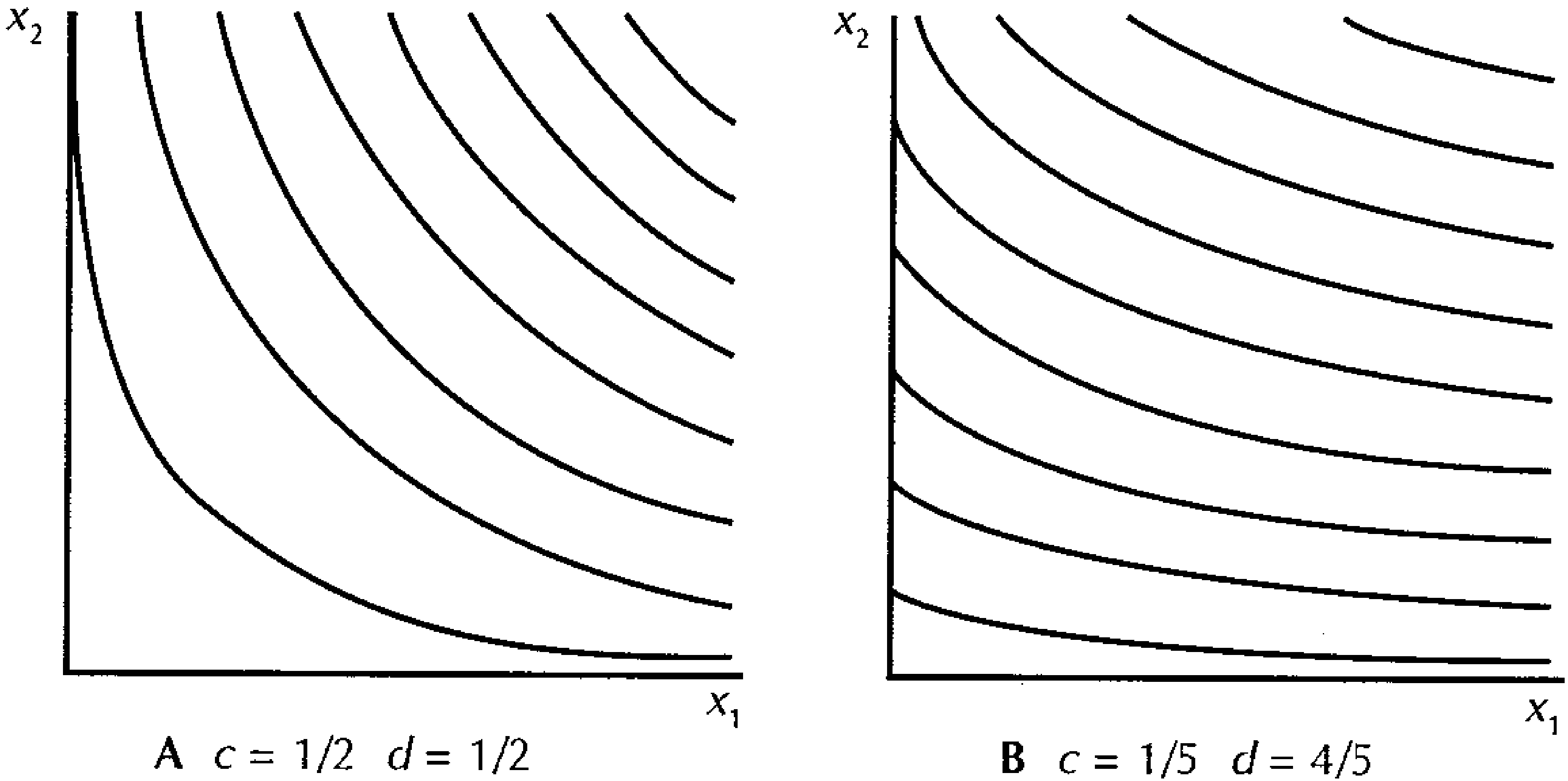
  $$u(x_1,x_2) = x_1^c x_2^d$$

  čia $c$ ir $d$ yra teigiami skaičiai, apibūdinantys vartotojo pirmenybes.
- **Paul'as Douglas** buvo XX amžiaus Čikagos universiteto ekonomistas, vėliau tapo Jungtinių Valstijų senatoriumi.
- **Charles'as Cobb'as** buvo Amherst koledžo matematikas. Cobb'o-Douglas'o funkcinė forma iš pradžių buvo taikoma studijuojant gamintojų elgseną.

# Pavyzdys: Cobb'o - Douglas'o pirmenybės (2)

- **Cobb'o - Douglas'o naudingumo funkcija bus patogi įvairiems pavyzdžiams**.
- Pirmenybės, užrašomos Cobb'o - Douglas'o naudingumo funkcija, turi bendrą pavidalą, pavaizduotą 4.5 paveiksle.
- 4.5A paveiksle pavaizdavome abejingumo kreives, kai $c = 1/2$, $d = 1/2$. 4.5B paveiksle - kai $c = 1/5$, $d = 4/5$. Atkreipkite dėmesį, kaip skirtingos parametrų $c$ ir $d$ reikšmės daro įtaką abejingumo kreivių pavidalui.

**4.5 pav. Cobb'o-Douglas'o abejingumo kreivės.** A brėžinyje parodytas atvejis, kai c = 1/2, d = 1/2, o B brėžinyje atvejis, kai c = 1/5, d = 4/5.



# Pavyzdys: Cobb’o - Douglas’o pirmenybės (3)

- **Cobb’o - Douglas’o abejingumo kreivės panašios į gražiai iškiląsias monotonines abejingumo kreives**, kurias 3 paskaitoje pavadinome „geros elgsenos abejingumo kreivėmis”.
- Cobb’o - Douglas’o pirmenybės yra įprastinis gerai besielgiančių abejingumo kreivių pavyzdys. Iš tikrųjų jų užrašymo **formulė turbūt yra paprasčiausia algebrinė gerai besielgiančių pirmenybių išraiška**.
- Įsitikinsime, kad Cobb’o - Douglas’o pirmenybėmis patogu pateikti ekonominių idėjų, kurias studijuosime vėliau, algebrinius pavyzdžius.

# Pavyzdys: Cobb'o - Douglas'o pirmenybės (4)

- Žinoma, Cobb'o - Douglas'o naudingumo funkcijos monotoninė transformacija išreiškia lygiai tokias pat pirmenybes. Todėl naudinga susipažinti su keletu šių **transformacijų pavyzdžių**.
- Pirmiausia, jei naudingumą logaritmuotume, tai narių sandauga pavirstų į sumą:

  $v(x_1,x_2) = ln(x_1{}^c x_2{}^d) = c\ ln\ x_1 + d\ ln\ x_2$
- Šios naudingumo funkcijos abejingumo kreivės atrodys lygiai kaip ir pirmosios Cobb'o - Douglas'o funkcijos abejingumo kreivės, nes natūralusis logaritmas yra monotoninė transformacija.

# Pavyzdys: Cobb’o - Douglas’o pirmenybės (5)

- Pradėkima nuo Cobb’o - Douglas’o pavidalo:

  $v(x_1,x_2) = x_1^c x_2^d$
- Tada, naudingumą pakėlę $1/(c + d)$ laipsniu, gauname:

  $$x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$$
- Dabar apibrėžiame naują skaičių:

  $$a = \frac{c}{c+d}$$
- Galime užrašyti mūsų naudingumo funkciją:

  $v(x_1,x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$

# Pavyzdys: Cobb'o - Douglas'o pirmenybės (6)

- Tai reiškia, kad **Cobb'o - Douglas'o naudingumo funkciją monotonine transformacija visada galime pakeisti į tokią funkciją, kurios laipsnių rodiklių suma lygi 1**.
- Tokia funkcija turi svarbią ekonominę prasmę. **Makroekonomikoje** tokia funkcija dažnai naudojama išreiškiant ekonomikos **gamybos funkciją su pastovia masto grąža**.

# Ribinis naudingumas

- Įsivaizduokite vartotoją, kuris vartoja kažkokį prekių rinkinį $(x_1, x_2)$. Kaip pasikeis šio vartotojo naudingumas, kai jam duosime šiek tiek daugiau pirmos prekės? Šis pokyčių santykis vadinamas pirmos prekės **ribiniu naudingumu**. Jį žymime $MU_1$ ir įsivaizduojame kaip santykį:

$$MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

  kuris išmatuoja naudingumo pokyčio ($\Delta U$), susijusio su mažu pirmos prekės pokyčiu ($\Delta x_1$), greitį. Atkreipkite dėmesį, kad **šiame skaičiavime antros prekės kiekis laikomas nekintančiu**.

# Ribinis naudingumas (2)

- Iš šio apibrėžimo matyti, kad, norint apskaičiuoti naudingumo pokytį, susijusį su nedideliu pirmos prekės suvartojimo pokyčiu, **vartojimo pokytį užtenka padauginti iš prekės ribinio naudingumo**: $\Delta U = MU_1 \Delta x_1$
- Antros prekės ribinis naudingumas apibrėžiamas panašiai:

$$MU_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

- Atkreipkite dėmesį, kad, skaičiuodami antros prekės ribinį naudingumą, pirmos kiekį laikome nekintančiu. Galime apskaičiuoti ir naudingumo pokytį, susijusį su antros prekės suvartojimo pokyčiu, pagal formulę: $\Delta U = MU_2 \Delta x_2$

# Ribinis naudingumas (3)

- Svarbu suprasti, kad **ribinio naudingumo dydis priklauso nuo naudingumo dydžio**. Todėl jis priklauso nuo pasirinkto būdo naudingumui matuoti. Jei naudingumą padaugintume iš 2, tai ribinis naudingumas taip pat būtų padaugintas iš 2. Vis dar turėtume pilnai galiojančią naudingumo funkciją, kuri vaizduotų tokias pat pirmenybes, tik matuotų kitu masteliu.
- Tai reiškia, kad **pats savaime ribinis naudingumas vartotojo elgsenos neapibūdina**. Kaip būtų galima apskaičiuoti ribinį naudingumą, žinant vartotojo pasirinkimo elgseną? Niekaip. Pasirinkimo elgsena tik suteikia žinių apie būdą, kuriuo vartotojas išrikiuoja skirtingus prekių rinkinius.

# Ribinis naudingumas (4)

- Ribinis naudingumas priklauso nuo konkrečios naudingumo funkcijos, kurią naudojame pirmenybės išrikiavimui pavaizduoti, ir jos dydis ypatingos reikšmės neturi.
- Tačiau pasirodo, kad **ribinis naudingumas gali būti naudojamas apskaičiuoti kažkam, kas apibūdina vartotojo elgseną**, ką pamatysime toliau.

# Ribinis naudingumas ir MRS

- **Naudingumo funkcija $u(x_1,x_2)$ galime išmatuoti ribinę pakeitimo normą (MRS)**, apibrėžtą 3 paskaitoje.
- Atminkite, kad **MRS atitinka abejingumo kreivės nuolydį esant tam tikram prekių rinkiniui**; ją galime paaiškinti kaip santykį, kuriuo vartotojas pasirengęs pakeisti nedidelį antros prekės kiekį į pirmą prekę.
- Šis aiškinimas rodo paprastą MRS apskaičiavimo būdą. Atsižvelkite į kiekvienos prekės suvartojimo pokytį $(\Delta x_1,\Delta x_2)$, kuris išlaiko pastovų naudingumą, t.y. vartojimo pokytį, kuris perkelia išilgai abejingumo kreivės. Tada privalo būti:

  $$MU_1\Delta x_1 + MU_2\Delta x_2 = \Delta U = 0.$$

# Ribinis naudingumas ir MRS (2)

- Išreiškę abejingumo kreivės nuolydį, gauname:

$$MRS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MU_1}{MU_2} \qquad (4.1)$$

- Atkreipkite dėmesį, kad kairėje lygybės pusėje - antra prekė virš pirmos, o dešinėje - pirma virš antros.
- **Algebrinis MRS ženklas yra neigiamas**: jei pirmos prekės gaunate daugiau, tai antros turite gauti mažiau todėl, kad išlaikytumėte tą patį naudingumo lygį. Tačiau minuso ženklo išlaikymas tampa varginančiu dalyku, todėl ekonomistai dažnai nurodo absoliutųjį MRS dydį, t.y. teigiamą reikšmę. Mes irgi laikysimės šio susitarimo, jei tai nekels painiavos.

# Ribinis naudingumas ir MRS (3)

- **MRS gali būti apskaičiuotas, stebint žmogaus elgseną tikrovėje**, - randame tą mainų santykį, kuriam esant jis nori likti ten, kur yra, kaip aprašyta 3 paskaitoje.
- Naudingumo funkcija, taigi ir ribinio naudingumo funkcija neapibrėžiamos vieninteliu būdu. Bet kokia naudingumo funkcijos monotoninė transformacija suteikia kitą tiek pat pagrįstą naudingumo funkciją. Todėl jei naudingumą padauginsime iš 2, tai ribinis naudingumas taip pat bus padaugintas iš 2. Todėl pastarojo funkcijos reikšmė priklauso nuo gana laisvo naudingumo funkcijos pasirinkimo. Ji nepriklauso vien tik nuo elgesio, ji priklauso nuo naudingumo funkcijos, kurią naudojame elgesiui apibūdinti.

# Ribinis naudingumas ir MRS (4)

- **Tačiau ribinių naudingumų santykis tikrovėje yra stebimas dydis, tai ribinė pakeitimo norma**.
- Ribinių naudingumų santykis nepriklauso nuo naudingumo funkcijos, kurią pasirenkate naudoti, konkrečios transformacijos. Pažiūrėkite, kas atsitiks, jei naudingumą padauginsite iš 2. MRS taps:

$$MRS = -\frac{2MU_1}{2MU_2}$$

- Suprastinus 2, MRS lieka nepakitusi. Tas pat atsitinka, kai padarome bet kokią naudingumo funkcijos monotoninę transformaciją.

# Ribinis naudingumas ir MRS (5)

- Ji yra naujas abejingumo kreivių paženklinimas, o aprašytas MRS apskaičiavimas susijęs su judėjimu išilgai šios abejingumo kreivės.
- **Net jei monotoninė transformacija ir pakeistų ribinius naudingumus, jų santykis nepriklauso nuo konkretaus būdo, kurį pasirenkame pirmenybių išraiškai**.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas

- Naudingumo funkcijos yra būdai pasirinkimo elgsenai apibūdinti: jei pasirenkamas prekių rinkinys $X$, kai prekių rinkinys $Y$ irgi įperkamas, tada $X$ turi turėti didesnį naudingumą nei $Y$. **Nagrinėdami vartotojų pasirinkimus, galime statistiškai įvertinti naudingumo funkciją jų elgesiui apibūdinti**.
- Tai plačiai taikoma **transporto ekonomikos srityje** vartotojų keliavimo į darbą elgsenai tirti. Daugelyje didmiesčių **keliaujantys gali pasirinkti, ar į darbą važiuoti viešuoju, ar nuosavu transportu**. Kiekviena alternatyva gali būti suprantama kaip skirtingų savybių: kelionės ir laukimo laiko, išlaidų, patogumų ir t.t. rinkinys. $x_1$ laikykime kelionės rūšies laiko trukme, $x_2$ - laukimo trukme ir t.t.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (2)

- Jei $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ reiškia $n$ skirtingų savybių važiavimo nuosavu automobiliu reikšmes, o $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ - važiavimo autobusu reikšmes, tai galima aptarti modelį, kai vartotojas sprendžia, **ar važiuoti nuosavu automobiliu, ar autobusu**, priklausomai nuo to, ar jam labiau patinka vienas savybių rinkinys, ar kitas.
- Tarkime, vidutinio vartotojo pirmenybės savybėms gali būti išreiškiamos tokio pavidalo naudingumo funkcija:

  $$U(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$$

  kur koeficientai $\beta_1$, $\beta_2$ ir t.t. yra nežinomi parametrai. Bet kokia šios naudingumo funkcijos monotoninė transformacija pasirinkimo elgseną apibūdintų taip pat, tačiau **su tiesiniu pavidalu ypač lengva dirbti taikant statistinius metodus**.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (3)

- **Dabar įsivaizduokite, kad stebime panašius vartotojus, kurie renkasi, kaip keliauti**, - nuosavu automobiliu ar autobusu, **atsižvelgdami į kelionės trukmę, išlaidas** ir pan.
- Egzistuoja **statistiniai metodai, kurie gali būti taikomi tokiems koeficientų $\beta_i$ įvertinimams**, kai $i = 1,\ldots,n$; jie labiausiai atitiktų tiriamos vartotojų aibės pasirinkimo pobūdį. Šie statistiniai metodai parodo būdą, kaip įvertinti skirtingų kelionės būdų naudingumo funkciją.
- Knygoje Thomas Domenich, Daniel McFadden, *Urban Travel Demand* (North-Holland Publishing Company, 1975) pateikiamas toks naudingumo funkcijos pavidalas:

$$U(TW,TT,C) = -0{,}147TW - 0{,}0411TT - 2{,}24C \qquad (4.2)$$

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (4)

$TW$ = bendras ėjimo laikas iki ir nuo autobuso ar automobilio,

$TT$ = bendra kelionės trukmė minutėmis,

$C$ = bendra kelionės kaina doleriais.

- **Koeficientai prie kintamųjų (4.2) lygybėje apibūdina svorį, kurį vidutinis namų ūkis priskiria įvairioms susisiekimo savybėms, t.y. kiekvienos savybės ribinį naudingumą**.
- **Vieno koeficiento santykis su kitu rodo ribinę pakeitimo normą** tarp vienos ir kitos savybės.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (5)

- Pavyzdžiui, ėjimo ir bendro kelionės laiko ribinių naudingumų santykis rodo, kad ėjimo laikas reikalauja apytiksliai 3 kartus daugiau pastangų nei bendras vidutinio vartotojo kelionės laikas. Kitaip sakant, **vartotojas bus linkęs sutikti su 3 minutėmis papildomo kelionės laiko, kad išvengtų 1 minutės ėjimo pėsčiomis**.
- Panašiai kelionės kainos ir trukmės santykis rodo, kaip vidutinis vartotojas sutinka juos mainyti. Šiame pavyzdyje vidutinis keleivis 1 minutę kelionės vertina 0,0411/2,24 = 0,0183 dolerio už minutę ir 1,10 dolerio už valandą. Palyginimui, valandinis vidutinio keleivio uždarbis 1967 -aisiais (tyrimo metais) buvo apie 2,85 dolerio per valandą.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (6)

- Toks **naudingumo funkcijos statistinis įvertinimas gali labai praversti, nustatant, ar verta daryti kokius nors pakeitimus visuomeninio transporto sistemoje**, ar ne.
- Pavyzdžiui, minėtoje naudingumo funkcijoje vienas reikšmingiausių veiksnių, paaiškinančių kelionės būdo pasirinkimą, yra jos trukmė. Miesto transporto vadovybė gali už tam tikrą kainą autobusų skaičių padidinti, kad sutrumpėtų kelionės trukmė. Bet ar padengs padidėjusias išlaidas papildomi keleiviai?
- Jei žinoma naudingumo funkcija ir vartotojų aibė, tai galime prognozuoti, kurie vartotojai važiuos nuosavu automobiliu, o kurie pasirinks kelionę autobusu. Tai leistų suprasti, ar pajamos padengs papildomus kaštus.

# Pavyzdys: kelionės į darbą naudingumas (7)

- Be to, **galime naudoti ribinę pakeitimo normą, kad apskaičiuotume, kiek vartotojas vertina kelionės trukmės sutrumpinimą**.
- Jau matėme, kad Domenich'o – McFadden'o tiriamajame darbe vidutinis keleivis 1967 m. vieną važiavimo valandą įvertino 1,10 dolerio. Taigi **vartotojas turėtų būti linkęs sumokėti apie 0,37 dolerio, kad sutrumpintų savo kelionės laiką 20 minučių**.
- **Šis skaičius rodo naudos dydį doleriais, padarius greitesnį susisiekimą autobusu**. Nauda turi būti lyginama su greitesnio susisiekimo autobusu kaina norint nustatyti, ar verta tokį projektą įgyvendinti. Kiekybiškai išmatuota nauda padės priimti racionalų transporto politikos sprendimą.

# Santrauka

1. Naudingumo funkcija yra tik būdas išreikšti arba apibūdinti pirmenybės išrikiavimą. Naudingumo lygių skaitiniai dydžiai esminės reikšmės neturi.
2. Todėl jei yra bet kokia naudingumo funkcija, tai bet kokia jos monotoninė transformacija išreiškia tas pačias pirmenybes.
3. Ribinė pakeitimo norma, MRS, gali būti apskaičiuojama iš naudingumo funkcijos pagal formulę:

   $MRS = \Delta x_2/\Delta x_1 = -MU_1/MU_2$.

# Sąvokos

- Vartotojo pirmenybės
- Naudingumo funkcija
- Ordinalusis naudingumas
- Monotoninė transformacija
- Kardinalusis naudingumas
- Kvazitiesinis naudingumas
- Cobb'o – Douglas'o naudingumas
- Ribinis naudingumas